#06 – Křivky a křivkové integrály

aktualizace: 15. listopad 2026

1 Křivky

Definice (Křivka).
Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval.

- *Křivka třídy* C^1 v $\mathbb{R}^N$ je zobrazení $\varphi \in C^1(I;\mathbb{R}^N)$ (v krajních bodech I bereme jednostranné derivace).
- *Křivka po částech třídy* C^1 je spojité $\varphi\colon I \to \mathbb{R}^N$, pro které lze I rozdělit na konečně mnoho intervalů, na nichž je φ třídy C^1 (typicky lomená čára).
- Křivka po částech C^1 je *regulární*, jestliže $\varphi'(t) \neq 0$ pro všechna $t \in I$ (v dělicích bodech obě jednostranné derivace).
- $\langle\varphi\rangle := \varphi(I)$ je *geometrický obraz* křivky a $\varphi'(t)$ je *tečný vektor* v bodě $\varphi(t)$.

Křivka je zobrazení, ne množina: $\varphi(t)$ je poloha bodu v čase t, $\varphi'(t)$ jeho okamžitá rychlost a $\langle\varphi\rangle$ jen stopa, kterou za sebou nechá.

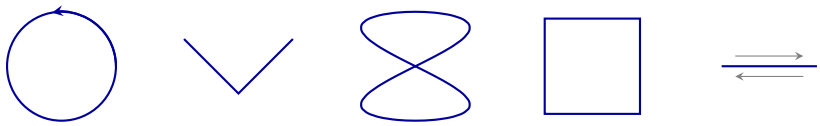
Definice (Uzavřená, jednoduchá a Jordanova křivka).
Nechť $\varphi\colon I \to \mathbb{R}^N$ je spojitá.

- φ je *uzavřená*, jestliže $I = [a,b]$ a $\varphi(a) = \varphi(b)$.
- φ je *jednoduchá*, jestliže je prostá na I, nebo $I = [a,b]$ a φ je prostá na $[a,b)$ i na $(a,b]$; a navíc je φ^{-1} spojitá na obrazu vnitřku intervalu I. Zhruba: křivka se neprotne ani nedotkne sama sebe, s jedinou povolenou výjimkou $\varphi(a) = \varphi(b)$.
- φ je *Jordanova*, je-li jednoduchá a uzavřená (kružnice, obvod čtverce, …).

Definice (Součet křivek a opačná křivka).
Končí-li (φ, I) v bodě, kde začíná (ψ, J), je *součet* $\varphi \oplus \psi$ křivka, která proběhne nejdřív φ a pak (časově posunutou) ψ. *Opačná křivka* je $(\ominus\varphi)(t) := \varphi(-t)$, $t \in -I$ – stejná stopa, opačný směr.

Úloha 1. Rozhodněte o vlastnostech křivek.

	křivka	po č. C^1?	regulární?	jednoduchá?	uzavřená?
(a)	$(\cos t,\ \sin t),\ \ t \in [0, 2\pi]$				
(b)	$(\cos t,\ \sin t),\ \ t \in [0, 4\pi]$				
(c)	$(t\,\lvert t\rvert,\ t^2),\ \ t \in [-1, 1]$				
(d)	$(\sin 2t,\ \sin t),\ \ t \in [0, 2\pi]$				
(e)	obvod čtverce $[0,1]^2$, jeden oběh				
(f)	$(\sin t,\ 0),\ \ t \in [0, \pi]$				



(a), (b) (c) (d) (e) (f)

Obrazy $\langle\varphi\rangle$. Křivky (a) a (b) mají stejný obraz – z obrázku vlastnosti křivky nepoznáme.

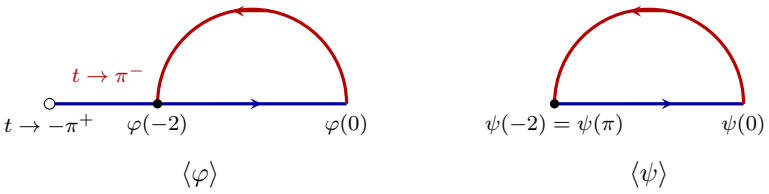
Úloha 2 (Prostá, a přesto ne jednoduchá)**.** Uvažujme křivky

$$\varphi(t) = \begin{cases} (t+1,\ 0), & t \in (-\pi, 0], \\ (\cos t,\ \sin t), & t \in [0, \pi), \end{cases} \qquad \psi(t) = \begin{cases} (t+1,\ 0), & t \in [-2, 0], \\ (\cos t,\ \sin t), & t \in [0, \pi]. \end{cases}$$

(a) Jsou obě křivky regulární po částech C^1? Jsou třídy C^1?

(b) Ukažte, že φ je prostá, ale není jednoduchá. *Nápověda:* kam se blíží $\varphi(t)$ pro $t \to \pi^-$?

(c) Ukažte, že ψ je Jordanova křivka.



$\langle\varphi\rangle$ $\langle\psi\rangle$

2 Křivkový integrál prvního druhu

Definice (Křivkový integrál prvního druhu).
Nechť (φ, I) je regulární po částech C^1-křivka v $\mathbb{R}^N$ a f je funkce definovaná na $\langle\varphi\rangle$. Pak

$$\boxed{\int_\varphi f \,\mathrm{d}s := \int_I f(\varphi(t))\, \|\varphi'(t)\| \,\mathrm{d}t,} \qquad \|\varphi'(t)\| = \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \cdots + \varphi_N'(t)^2},$$

pokud integrál napravo existuje (jako Lebesgueův) a je konečný. Číslo $\int_\varphi 1 \,\mathrm{d}s$ je *délka* křivky.

Fyzikálně. $\|\varphi'(t)\| \,\mathrm{d}t$ je dráha uražená za čas $\mathrm{d}t$ (rychlost krát čas), $\mathrm{d}s$ je tedy „kousek délky“. Je-li f délková hustota drátu tvaru $\langle\varphi\rangle$, je $\int_\varphi f \,\mathrm{d}s$ jeho hmotnost. Je-li $f(x, y) \geq 0$ výška plotu nad bodem (x, y), je $\int_\varphi f \,\mathrm{d}s$ obsah plotu.

Tvrzeníčko (Vlastnosti integrálu prvního druhu).

- linearita v f a aditivita $\int_{\varphi\oplus\psi} f \,\mathrm{d}s = \int_\varphi f \,\mathrm{d}s + \int_\psi f \,\mathrm{d}s$,
- nezávislost na směru: $\int_{\ominus\varphi} f \,\mathrm{d}s = \int_\varphi f \,\mathrm{d}s$,
- nezávislost na parametrizaci: jsou-li $(\varphi, [a, b])$, $(\psi, [\alpha, \beta])$ **jednoduché** regulární po částech C^1-křivky s $\langle\varphi\rangle = \langle\psi\rangle$ a f je spojitá na $\langle\varphi\rangle$, pak $\int_\varphi f \,\mathrm{d}s = \int_\psi f \,\mathrm{d}s$.

Přes jednoduchou křivku tedy integrál prvního druhu závisí jen na *množině* $\langle\varphi\rangle$ a parametrizaci si vybereme, jak se nám hodí.

Úloha 3. Spočtěte

(a) délku jednoho oblouku cykloidy $\varphi(t) = (t - \sin t,\ 1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$ – dráhu odrazky na obvodu kola o poloměru 1 za jednu otáčku,

(b) $\int_k (x + y)\,\mathrm{d}s$, kde k je obvod trojúhelníku s vrcholy $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$,

(c) obsah plotu, který stojí nad čtvrtkružnicí $x^2 + y^2 = 1$, $x, y \geq 0$, a nad bodem (x, y) má výšku xy.

3 Křivkový integrál druhého druhu

Definice (Křivkový integrál druhého druhu).
Nechť (φ, I) je regulární po částech C^1-křivka v $\mathbb{R}^N$ a $F\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ je vektorové pole definované na $\langle\varphi\rangle$. Pak

$$\boxed{\int_\varphi F \cdot \mathrm{d}\varphi := \int_I F(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t,}$$

pokud integrál napravo existuje (jako Lebesgueův) a je konečný; $\cdot$ je skalární součin v $\mathbb{R}^N$. Píšeme také $\int_\varphi F_1\,\mathrm{d}x_1 + \cdots + F_N\,\mathrm{d}x_N$, v rovině $\int_\varphi F_1\,\mathrm{d}x + F_2\,\mathrm{d}y$.

Prvního vs. druhého druhu.

	prvního druhu	druhého druhu
integrujeme	funkci $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$	pole $F\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$
element	$\mathrm{d}s = \lVert\varphi'(t)\rVert\,\mathrm{d}t$	$\mathrm{d}\varphi = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$
fyzikálně	hmotnost drátu	práce síly podél dráhy
opačná křivka $\ominus\varphi$	stejná hodnota	**opačné znaménko**

S jednotkovým tečným vektorem $\tau = \frac{\varphi'}{\lVert\varphi'\rVert}$ je $\int_\varphi F \cdot \mathrm{d}\varphi = \int_\varphi (F \cdot \tau)\,\mathrm{d}s$ – práci koná jen tečná složka síly. Pro jednoduché křivky se stejným obrazem se integrály druhého druhu shodují až na znaménko, rozhoduje jen směr průchodu.

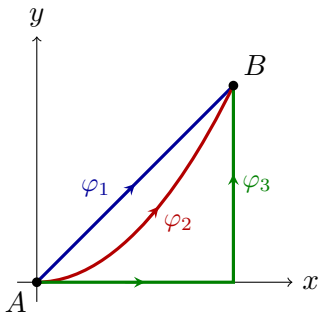
Úloha 4 (Záleží na cestě?)**.** Z bodu $A = (0, 0)$ do bodu $B = (1, 1)$ vedou tři cesty: φ_1 po úsečce, φ_2 po parabole $y = x^2$ a φ_3 po lomené čáře přes bod $(1, 0)$. Pro pole

$$F(x, y) = (2xy,\ x^2) \qquad \text{a} \qquad G(x, y) = (-y,\ x)$$

(a) spočtěte $\int_{\varphi_i} F \cdot \mathrm{d}\varphi_i$ a $\int_{\varphi_i} G \cdot \mathrm{d}\varphi_i$ pro $i = 1, 2, 3$,

(b) spočtěte integrály obou polí přes uzavřenou křivku $\varphi_3 \oplus (\ominus\varphi_1)$ (obvod trojúhelníku),

(c) ověřte, zda $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$, resp. $\frac{\partial G_1}{\partial y} = \frac{\partial G_2}{\partial x}$.



Definice (Potenciál, oblast, nezávislost na cestě).
Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená a $T \in C(\Omega; \mathbb{R}^N)$.

- Funkce U je *potenciál* pole T na Ω, jestliže $\frac{\partial U}{\partial x_i} = T_i$ na Ω pro všechna i, tj. $\nabla U = T$.
- Ω je *oblast*, je-li otevřená a souvislá (každé dva body lze spojit lomenou čarou v Ω).
- Integrál z T *nezávisí na cestě* v Ω, jestliže $\int_\varphi T \cdot \mathrm{d}\varphi = \int_\psi T \cdot \mathrm{d}\psi$ pro každé dvě regulární po částech C^1-křivky v Ω se stejným počátečním i koncovým bodem.
- Oblast Ω je *jednoduše souvislá*, jestliže každou Jordanovu křivku v Ω lze uvnitř Ω spojitě stáhnout do bodu – „oblast bez děr“. Konvexní množiny jednoduše souvislé jsou, $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ není.

Tvrzeníčko (Potenciál a nezávislost na cestě). Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je oblast a $T \in C(\Omega; \mathbb{R}^N)$. Pak jsou následující podmínky ekvivalentní:

(A) T má na Ω potenciál U,

(B) integrál z T nezávisí na cestě v Ω,

(C) $\int_\varphi T \cdot \mathrm{d}\varphi = 0$ pro každou uzavřenou regulární po částech C^1-křivku φ v Ω.

Přitom pro každou regulární po částech C^1-křivku $(\varphi, [a,b])$ v Ω platí

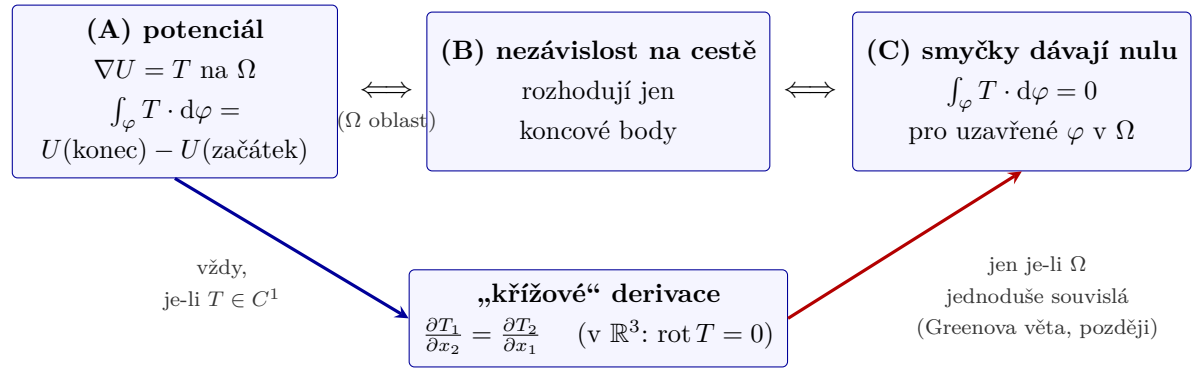
$$\boxed{\int_\varphi T \cdot \mathrm{d}\varphi = U(\varphi(b)) - U(\varphi(a)).}$$

Je-li navíc $T \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$, pak:

(D) **nutná podmínka:** má-li T potenciál, je $\frac{\partial T_i}{\partial x_j} = \frac{\partial T_j}{\partial x_i}$ na Ω pro všechna i, j; v $\mathbb{R}^2$ to znamená $\frac{\partial T_1}{\partial y} = \frac{\partial T_2}{\partial x}$, v $\mathbb{R}^3$ $\operatorname{rot} T = 0$,

(E) **postačující podmínka:** je-li Ω jednoduše souvislá oblast v $\mathbb{R}^2$, resp. konvexní otevřená množina v $\mathbb{R}^3$, plyne z podmínky v (D) existence potenciálu.

Myšlenková mapa.



díra v Ω: křížové derivace se rovnají, a přesto potenciál neexistuje (Úloha 7)

Prakticky: jak spočítat $\int_\varphi T \cdot \mathrm{d}\varphi$.

(1) Ověříme křížové derivace (rotaci v $\mathbb{R}^3$). Nerovnají-li se, potenciál neexistuje a počítáme z definice.

(2) Rovnají-li se, hledáme U: z $\frac{\partial U}{\partial x} = T_1$ dostaneme $U = \int T_1 \,\mathrm{d}x + C(y,z)$, dosadíme do $\frac{\partial U}{\partial y} = T_2$, dopočteme C, atd. Najdeme-li U, je hotovo – tvar cesty je jedno.

(3) Pozor na definiční obor: U musí být potenciálem na otevřené množině, která obsahuje *celou* $\langle\varphi\rangle$.

Úloha 5 (Potenciál šetří práci)**.** Spočtěte co nejméně pracně.

(a) Ukažte, že pole $T(x,y,z) = (2xy + z^2,\ x^2,\ 2xz)$ má na $\mathbb{R}^3$ potenciál, najděte ho a spočtěte $\int_\varphi T \cdot \mathrm{d}\varphi$ přes kus šroubovice $\varphi(t) = (\cos t,\ \sin t,\ t)$, $t \in [0, \pi]$.

(b) *(Gravitace.)* Ukažte, že $U(x) = \frac{1}{\|x\|}$ je potenciál pole $T(x) = -\frac{x}{\|x\|^3}$ na $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Jakou práci vykoná T při přesunu z bodu $(1,2,2)$ do bodu $(0,3,4)$ po libovolné cestě, která se vyhne počátku? A při oběhu po uzavřené dráze?

4 Greenova věta

Definice (Kladně obíhaná křivka).
Jordanova křivka φ v $\mathbb{R}^2$ rozdělí rovinu na omezený *vnitřek* $\operatorname{Int}\varphi$, obraz $\langle\varphi\rangle$ a neomezený vnějšek (Jordanova věta). Křivka je obíhaná v *kladném smyslu*, jestliže při pohybu ve směru parametrizace máme $\operatorname{Int}\varphi$ po levé ruce (proti směru hodinových ručiček), např. $(\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Tvrzeníčko (Greenova věta).

- $(\varphi, [a,b])$ je kladně obíhaná regulární Jordanova po částech C^1-křivka v $\mathbb{R}^2$, $\Omega := \operatorname{Int}\varphi$,
- $T = (T_1, T_2) \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^2)$ a parciální derivace $\frac{\partial T_2}{\partial x}$, $\frac{\partial T_1}{\partial y}$ existují v Ω a dají se spojitě rozšířit na $\overline{\Omega}$.

Potom

$$\int_\varphi T \cdot \mathrm{d}\varphi = \int_\Omega \Big(\frac{\partial T_2}{\partial x} - \frac{\partial T_1}{\partial y}\Big)\,\mathrm{d}\lambda_2.$$

Pro záporně obíhanou φ vyjde napravo opačné znaménko.

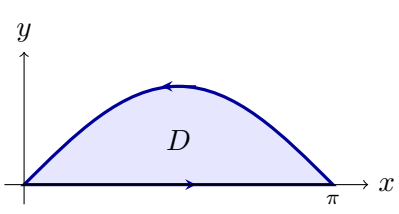
Co Green říká. Výraz $\frac{\partial T_2}{\partial x} - \frac{\partial T_1}{\partial y}$ měří, jak moc pole v daném bodě „víří“ (je to třetí složka $\operatorname{rot}(T_1, T_2, 0)$). Green tedy říká: *celkové víření uvnitř = cirkulace podél hranice* – malé vírky uvnitř se navzájem vyruší a zbude jen hranice.

Úloha 6. Použijte Greenovu větu.

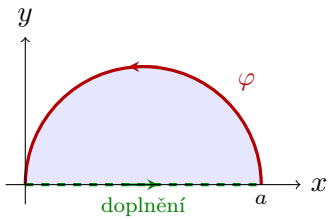
(a) Spočtěte $\int_\varphi e^x(1-\cos y)\,\mathrm{d}x - e^x(y-\sin y)\,\mathrm{d}y$, kde φ je kladně obíhaná hranice množiny $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<x<\pi,\ 0<y<\sin x\}$.

(b) Spočtěte obsah elipsy s poloosami $a, b > 0$ pomocí křivkového integrálu.

(c) Spočtěte $\int_\varphi (e^x \sin y - 16y)\,\mathrm{d}x + (e^x\cos y - 16)\,\mathrm{d}y$, kde φ je horní půlkružnice $x^2+y^2 = ax$, $y \geq 0$ ($a>0$), proběhnutá z bodu $(a,0)$ do bodu $(0,0)$. *Nápověda:* doplňte φ na uzavřenou křivku.



(a)



(c)

5 Na předpokladech záleží

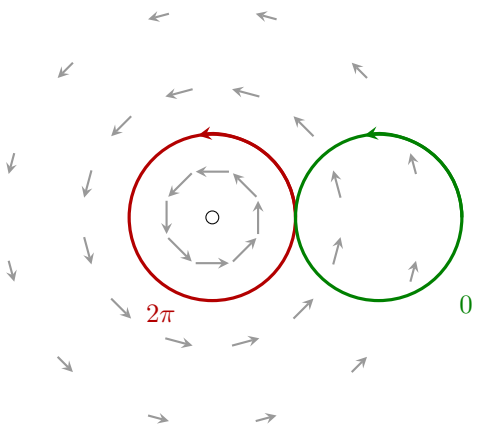
Úloha 7 (Vír)**.** Na $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ uvažujme pole

$$T(x,y) = \Big(\frac{-y}{x^2+y^2},\ \frac{x}{x^2+y^2}\Big).$$

(a) Ověřte, že $\frac{\partial T_1}{\partial y} = \frac{\partial T_2}{\partial x}$ na celé Ω.

(b) Spočtěte $\int_\varphi T\cdot \mathrm{d}\varphi$ pro kružnici $\varphi(t) = (r\cos t,\ r\sin t)$, $t\in[0,2\pi]$, $r>0$. Má T na Ω potenciál? Proč to není ve sporu s větami o potenciálu?

(c) Ukažte, že $U(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ je potenciál T na polorovině $\{x>0\}$. Kolik je integrál z T přes kružnici se středem $(2,0)$ a poloměrem 1?



Úloha 8 (Najděte chybu v úvahách)**.** Každá z úvah obsahuje chybu. Najděte ji a opravte výsledek.

(a) Obraz křivky $\varphi(t) = (\cos t,\ \sin t)$, $t\in[0,4\pi]$, je jednotková kružnice délky 2π, takže $\int_\varphi 1\,\mathrm{d}s = 2\pi$.

(b) Pro vír T z Úlohy 7 a jednotkovou kružnici φ dává Greenova věta

$$\int_\varphi T \cdot \mathrm{d}\varphi = \int_{B_1(0)} \Big(\frac{\partial T_2}{\partial x} - \frac{\partial T_1}{\partial y} \Big) \,\mathrm{d}\lambda_2 = \int_{B_1(0)} 0 \,\mathrm{d}\lambda_2 = 0.$$

(c) Pro vír T a horní půlkružnici $\varphi(t) = (\cos t,\ \sin t)$, $t \in [0, \pi]$, je díky potenciálu $U = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$

$$\int_\varphi T \cdot \mathrm{d}\varphi = U(-1,0) - U(1,0) = \operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} 0 = 0.$$

(d) Obsah množiny ohraničené osmičkou $\varphi(t) = (\sin 2t,\ \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, je podle Greena

$$\frac{1}{2} \int_\varphi x \,\mathrm{d}y - y \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \big(2 \sin t - 2 \sin t \cos^2 t \big) \,\mathrm{d}t = 0.$$

Shrnutí: co není zdarma.

předpoklad	k čemu je	co se stane bez něj
jednoduchost φ	integrál závisí jen na $\langle\varphi\rangle$	kružnice dvakrát: 4π místo 2π
regularita φ	hladký obraz	$(t\|t\|, t^2)$ je C^1, a přesto má zlom
Ω jednoduše souvislá	křížové derivace $\Rightarrow$ potenciál	vír na $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$
T hladké na celém $\overline{\operatorname{Int}\varphi}$	Greenova věta	vír přes kružnici: $2\pi \neq 0$
φ Jordanova	obsah z Greena	osmička: 0 místo $\frac{8}{3}$
U potenciál podél celé $\langle\varphi\rangle$	$U(\text{konec}) - U(\text{začátek})$	$\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ dá 0 místo π

computing curve integral over crazy curve

$$\int_{\varphi} \vec{F}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}$$



realizing out that

$$\mathrm{rot}\,F = 0$$



finding U such that

$$F = \nabla U$$

