#07 – Plochy a plošné integrály

aktualizace: 24. listopad 2026

1 Plochy

Definice (k-plocha).
Nechť $k < N$. Množina $M \subset \mathbb{R}^N$ je *k-plocha*, jestliže existují neprázdná otevřená množina $E \subset \mathbb{R}^k$ a zobrazení $\varphi\colon E \to \mathbb{R}^N$ tak, že

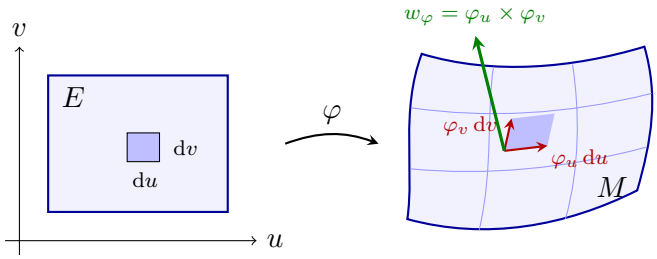
- $\varphi(E) = M$ a $\varphi \in C^1(E; \mathbb{R}^N)$,
- hodnost Jacobiho matice $D\varphi(t)$ je rovna k pro všechna $t \in E$ (*regularita*).

Zobrazení φ je *parametrizace* plochy M. Plocha je *jednoduchá*, je-li navíc φ prosté a φ^{-1} spojité na M.

Pro 2-plochu v $\mathbb{R}^3$ s parametrizací $\varphi = \varphi(u, v)$ značíme $\varphi_u := \frac{\partial \varphi}{\partial u}$, $\varphi_v := \frac{\partial \varphi}{\partial v}$. Regularita pak znamená, že φ_u, φ_v jsou lineárně nezávislé, neboli $\varphi_u \times \varphi_v \neq 0$.
Plocha je množina, ne zobrazení: u křivek nás zajímal pohyb bodu, u ploch jen výsledná množina M. Parametrizace je pomůcka, kterou si vybereme podle potřeby.

Definice (Tečná rovina a normála).
Nechť $M = \varphi(E)$ je jednoduchá 2-plocha v $\mathbb{R}^3$ a $x = \varphi(u, v)$.

- $T_x M := \operatorname{span}\{\varphi_u(u,v), \varphi_v(u,v)\}$ je *tečný prostor*, $x + T_x M$ je *tečná rovina*.
- $w_\varphi := \varphi_u \times \varphi_v$ je *normálový vektor* (kolmý na $T_x M$) a $\nu := \frac{w_\varphi}{\|w_\varphi\|}$ je *jednotková normála*.
- $\|w_\varphi\| = \sqrt{\det G}$, kde $G = \begin{pmatrix} \varphi_u \cdot \varphi_u & \varphi_u \cdot \varphi_v \\ \varphi_v \cdot \varphi_u & \varphi_v \cdot \varphi_v \end{pmatrix}$ je *Gramova matice*, tj. $\|w_\varphi\|^2 = \|\varphi_u\|^2 \|\varphi_v\|^2 - (\varphi_u \cdot \varphi_v)^2$.



Čtvereček $\mathrm{d}u \times \mathrm{d}v$ se zobrazí přibližně na rovnoběžník se stranami $\varphi_u\,\mathrm{d}u$, $\varphi_v\,\mathrm{d}v$ a obsahem $\|\varphi_u \times \varphi_v\|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$.

Definice (Zobecněná plocha).
Zhruba: M je *zobecněná k-plocha*, je-li sjednocením konečně mnoha disjunktních jednoduchých k-ploch a „švů“, tj. ploch nižší dimenze (křivek, bodů). Příklady: sféra = sféra bez poledníku ∪ poledník bez pólů ∪ dva póly; povrch krychle = 6 otevřených stěn ∪ 12 hran ∪ 8 vrcholů. Švy mají nulový obsah, do integrálů nepřispívají.

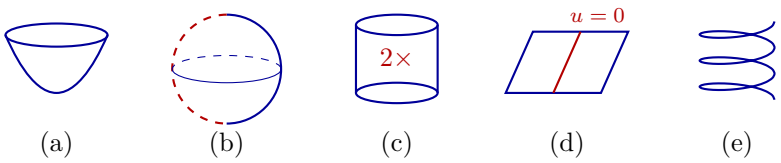
Kuchařka parametrizací.

plocha	parametrizace φ	$w_\varphi = \varphi_u \times \varphi_v$	$\|w_\varphi\|$
graf $z = f(x,y)$	$(x,\ y,\ f(x,y))$	$(-f_x,\ -f_y,\ 1)$ (nahoru)	$\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}$
sféra $\|x\| = R$	$R\,(\cos\vartheta\cos\alpha,\ \cos\vartheta\sin\alpha,\ \sin\vartheta)$	$R\cos\vartheta\cdot\varphi(\alpha,\vartheta)$ (ven)	$R^2\cos\vartheta$
válec $x^2+y^2=R^2$	$(R\cos\alpha,\ R\sin\alpha,\ z)$	$(R\cos\alpha,\ R\sin\alpha,\ 0)$ (ven)	R
kužel $z=\sqrt{x^2+y^2}$	$(r\cos\alpha,\ r\sin\alpha,\ r),\ r>0$	$(-r\cos\alpha,\ -r\sin\alpha,\ r)$ (k ose)	$\sqrt{2}\,r$

Úhly: azimut $\alpha \in (-\pi,\pi)$, zeměpisná šířka $\vartheta \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ měřená od roviny xy. Proměnné bereme v pořadí (x,y), (α,ϑ), (α,z), (r,α); při prohození pořadí změní w_φ znaménko.

Úloha 1. Rozhodněte o vlastnostech parametrizací $\varphi\colon E \to \mathbb{R}^3$ (všechny jsou třídy C^1) a jejich obrazů.

	parametrizace	hodnost 2?	prostá?	obraz je 2-plocha?
(a)	$(u,\ v,\ u^2+v^2),\ E=\mathbb{R}^2$			
(b)	$(\cos\vartheta\cos\alpha,\ \cos\vartheta\sin\alpha,\ \sin\vartheta),\ E=(-\pi,\pi)\times(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$			
(c)	$(\cos u,\ \sin u,\ v),\ E=(0,4\pi)\times(0,1)$			
(d)	$(u^3,\ v,\ 0),\ E=\mathbb{R}^2$			
(e)	$(\cos(u+v),\ \sin(u+v),\ u+v),\ E=\mathbb{R}^2$			



(a) (b) (c) (d) (e)

Obrazy $\varphi(E)$. U (c) a (d) je špatná parametrizace, ne plocha; (e) plocha vůbec není.

2 Plošný integrál prvního druhu

Definice (Plošný integrál prvního druhu).
Nechť $M = \varphi(E)$ je jednoduchá k-plocha v $\mathbb{R}^N$ a f je funkce definovaná na M. Pak

$$\int_M f\,\mathrm{d}S := \int_E f(\varphi(t))\sqrt{\det G(D\varphi(t))}\,\mathrm{d}t,$$

pokud integrál napravo existuje (jako Lebesgueův) a je konečný. Číslo $S_k(M) := \int_M 1\,\mathrm{d}S$ je *k-rozměrný obsah* M. Pro 2-plochu v $\mathbb{R}^3$ je $\sqrt{\det G} = \|\varphi_u \times \varphi_v\|$:

$$\boxed{\int_M f\,\mathrm{d}S = \int_E f(\varphi(u,v))\,\|\varphi_u\times\varphi_v\|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.}$$

Přes zobecněnou plochu integrujeme po k-rozměrných komponentách a sečteme (švy vynecháme).

Fyzikálně. $\mathrm{d}S = \|\varphi_u\times\varphi_v\|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$ je „kousek plochy“ (obrázek výše), obdoba $\mathrm{d}s = \|\varphi'(t)\|\,\mathrm{d}t$ u křivek. Je-li f plošná hustota slupky tvaru M, je $\int_M f\,\mathrm{d}S$ její hmotnost.

Tvrzeníčko (Vlastnosti integrálu prvního druhu).

- nezávislost na parametrizaci: dvě parametrizace téže **jednoduché** plochy dají stejný výsledek,
- nezávislost na rozkladu zobecněné plochy na komponenty,
- obsah se nemění posunutím ani otočením; při λ-násobném zvětšení vzroste k-rozměrný obsah λ^k-krát.

Integrál prvního druhu tedy závisí jen na *množině* M a parametrizaci si vybereme, jak se nám hodí.

Úloha 2 (Plošný element)**.** Spočtěte $\|\varphi_u \times \varphi_v\|$ a rozmyslete, proč výsledek dává geometricky smysl.

(a) $\varphi(u,v) = (u,\ v,\ 0)$ a $\varphi(u,v) = (2u,\ 3v,\ 0)$,

(b) $\varphi(u,v) = (u,\ v,\ u)$. Jaký je obsah části roviny $z = x$ nad čtvercem $[0,1]^2$?

(c) $\varphi(\alpha, z) = (R\cos\alpha,\ R\sin\alpha,\ z)$. Jaký je obsah pláště válce o poloměru R a výšce h?

Úloha 3 (Integrály skoro bez počítání)**.** Nechť $S_R = \partial B_R(0)$ je sféra o poloměru R a $\Delta = \{x+y+z = 1,\ x,y,z > 0\}$ trojúhelník. S využitím $S_2(S_R) = 4\pi R^2$ spočtěte

(a) $\int_{S_R}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}S$ a $\int_{S_R} z\,\mathrm{d}S$,

(b) $\int_\Delta (x+y+z)\,\mathrm{d}S$, jednou geometricky a jednou z definice (graf $z = 1-x-y$).

Úloha 4. Spočtěte

(a) *(Archimédés.)* obsah pásu $\{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = R,\ h_1 < z < h_2\}$, kde $-R \le h_1 < h_2 \le R$. Kolik vyjde pro celou sféru? Jaká část zemského povrchu leží severně od 60° s. š. (zhruba Oslo, Helsinky)?

(b) obsah části paraboloidu $z = x^2+y^2$ nad kruhem $x^2+y^2 < 1$,

(c) těžiště homogenní polosféry (slupky) $H = \{x^2+y^2+z^2 = R^2,\ z > 0\}$.

3 Plošný integrál druhého druhu

Definice (Orientace).
Nechť M je (zobecněná) 2-plocha v $\mathbb{R}^3$.

- V každém bodě M jsou dvě jednotkové normály $\pm\nu$. *Orientovat* M znamená vybrat *spojité* pole jednotkových normál ν na M. Jde-li to, je M *orientovatelná*.
- Parametrizace φ je s orientací *souhlasná*, je-li $\frac{w_\varphi}{\|w_\varphi\|} = \nu$, a *nesouhlasná*, je-li $\frac{w_\varphi}{\|w_\varphi\|} = -\nu$.
- Je-li $M = \partial\Omega$ hranice omezené otevřené množiny Ω, je *kladná orientace* dána *vnější normálou*: $x + t\nu \notin \Omega$ pro malá $t > 0$.

Definice (Plošný integrál druhého druhu (tok)).
Nechť M je orientovaná 2-plocha v $\mathbb{R}^3$ s normálou ν a $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je vektorové pole na M. *Tok* pole

T plochou M je integrál prvního druhu z normálové složky $T \cdot \nu$:

$$\int_M T \,\mathrm{d}S := \int_M (T \cdot \nu)\,\mathrm{d}S.$$

Je-li $M = \varphi(E)$, dosadíme $\nu\,\mathrm{d}S = \pm\frac{w_\varphi}{\|w_\varphi\|}\|w_\varphi\|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$ a dostaneme

$$\boxed{\int_M T \cdot \nu \,\mathrm{d}S = \pm \int_E T(\varphi(u,v)) \cdot (\varphi_u \times \varphi_v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,} \qquad + \text{ pro souhlasnou, } - \text{ pro nesouhlasnou } \varphi.$$

Píše se také $\int_M T_1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + T_2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + T_3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Prvního vs. druhého druhu.

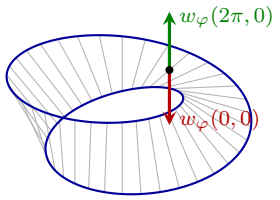
	prvního druhu	druhého druhu
integrujeme	funkci $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$	pole $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
element	$\mathrm{d}S = \|\varphi_u \times \varphi_v\|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$	$\nu\,\mathrm{d}S = \pm(\varphi_u \times \varphi_v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$
fyzikálně	hmotnost slupky	průtok kapaliny plochou
potřebujeme	jednoduchou (zobecněnou) plochu	navíc **orientaci**
opačná orientace $-\nu$	nehraje roli	**opačné znaménko**

U křivek konala práci jen *tečná* složka síly $T \cdot \tau$. U ploch dělá tok jen *normálová* složka $T \cdot \nu$: kapalina tekoucí podél plochy jí neprotéká.

Ne každá plocha jde orientovat. *Möbiův list*:

$$\varphi(u,v) = \Big(\big(2 + v\cos\tfrac{u}{2}\big)\cos u,\ \big(2 + v\cos\tfrac{u}{2}\big)\sin u,\ v\sin\tfrac{u}{2}\Big), \qquad u \in [0, 2\pi],\ v \in (-1,1).$$

Na středové kružnici je $w_\varphi(u,0) = 2\big(\cos u \sin\frac{u}{2},\ \sin u \sin\frac{u}{2},\ -\cos\frac{u}{2}\big)$. V bodě $\varphi(0,0) = \varphi(2\pi,0) = (2,0,0)$ tedy vyjde jednou $w_\varphi = (0,0,-2)$ a podruhé $(0,0,2)$: normála se po oběhu listu otočí. Spojitou normálu vybrat nejde, takže *tok Möbiovým listem nedává smysl.*



Úloha 5 (Orientace)**.** Rozhodněte, zda je parametrizace s danou orientací souhlasná (v toku znaménko $+$), nebo nesouhlasná ($-$).

(a) rovina $z = 0$ s normálou e_3: $\varphi(u,v) = (u,\ v,\ 0)$ a $\varphi(u,v) = (v,\ u,\ 0)$,

(b) graf $z = x^2 + y^2$ s normálou mířící dolů: $\varphi(x,y) = (x,\ y,\ x^2 + y^2)$,

(c) válec $x^2 + y^2 = 1$ s normálou mířící k ose z: $\varphi(\alpha, z) = (\cos\alpha,\ \sin\alpha,\ z)$,

(d) sféra s vnější normálou: $\varphi(\alpha,\vartheta)$ z kuchařky a $\psi(\vartheta,\alpha) := \varphi(\alpha,\vartheta)$.

Úloha 6 (Tok bez parametrizace)**.** Někdy stačí vědět, kolik je $T \cdot \nu$ na ploše.

(a) Spočtěte tok konstantního pole $T = (0, 0, 1)$ čtvercem $[0, 1]^2 \times \{0\}$ s normálou e_3, týmž čtvercem s normálou $-e_3$ a čtvercem $\{0\} \times [0, 1]^2$ s normálou e_1.

(b) Spočtěte tok konstantního pole $T = (1, 2, 3)$ trojúhelníkem Δ z Úlohy 3 s normálou mířící od počátku.

(c) Spočtěte tok polí $T(x) = \frac{x}{\|x\|}$ a $T(x, y, z) = (-y,\ x,\ 0)$ sférou $\partial B_R(0)$ s vnější normálou.

Úloha 7 (Tok)**.** Spočtěte z definice.

(a) Tok pole $T(x) = x$ sférou $\partial B_R(0)$ orientovanou vnější normálou. Porovnejte s objemem koule.

(b) *(Proudění v trubce.)* Voda teče rychlostí $v(x, y, z) = (0,\ 0,\ 1 - x^2 - y^2)$. Kolik vody proteče za jednotku času (i) kruhem $D = \{x^2 + y^2 < 1,\ z = 0\}$ orientovaným nahoru, (ii) polosférou $H = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z > 0\}$ orientovanou ven? Proč vyšlo totéž?

(c) Tok pole $T(x) = x$ kuželovou plochou $K = \{z = \sqrt{x^2 + y^2},\ 0 < z < 1\}$, orientovanou libovolně. Jde to bez počítání?

4 Věta o divergenci (Gaussova–Ostrogradského)

Definice (Divergence a rotace).
Pro $T = (T_1, T_2, T_3) \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ definujeme

$$\operatorname{div} T := \frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} + \frac{\partial T_3}{\partial z} = \nabla \cdot T, \qquad \operatorname{rot} T := \Big(\frac{\partial T_3}{\partial y} - \frac{\partial T_2}{\partial z},\ \frac{\partial T_1}{\partial z} - \frac{\partial T_3}{\partial x},\ \frac{\partial T_2}{\partial x} - \frac{\partial T_1}{\partial y}\Big) = \nabla \times T.$$

Pro U, T třídy C^2 platí $\operatorname{rot} \nabla U = 0$ a $\operatorname{div} \operatorname{rot} T = 0$.

Tvrzeníčko (Věta o divergenci).

- $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je omezená otevřená množina, $\partial\Omega$ je zobecněná 2-plocha s konečným obsahem a v každém bodě jejích 2-rozměrných komponent existuje vnější jednotková normála ν,
- $T \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3)$ a parciální derivace $\frac{\partial T_i}{\partial x_i}$ existují v Ω a dají se spojitě rozšířit na $\overline{\Omega}$.

Potom

$$\boxed{\int_\Omega \operatorname{div} T \,\mathrm{d}\lambda_3 = \int_{\partial\Omega} T \cdot \nu \,\mathrm{d}S.}$$

Speciálně pro pole s $\operatorname{div} T = 1$, např. $T = (0, 0, z)$, je $\lambda_3(\Omega) = \int_{\partial\Omega} T \cdot \nu \,\mathrm{d}S$: objem z povrchu.

Co Gauss říká. $\operatorname{div} T(x)$ je *hustota zdrojů* pole v bodě x: Gauss pro malou kouli dává $\operatorname{div} T(x) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{\lambda_3(B_\varepsilon(x))} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} T \cdot \nu \,\mathrm{d}S$. Věta tedy říká: *co se uvnitř vyrobí, vyteče hranicí.* Je-li $\operatorname{div} T = 0$ (nestlačitelná kapalina, magnetické pole), co do Ω vteče, to z ní i vyteče.

Úloha 8 (Divergence a rotace)**.** Spočtěte $\operatorname{div} T$ a $\operatorname{rot} T$ a popište, co pole „dělá“.

(a) $T(x,y,z) = (x,\ y,\ z)$,

(b) $T(x,y,z) = (-y,\ x,\ 0)$,

(c) $T(x,y,z) = (0,\ 0,\ 1-x^2-y^2)$ (proudění v trubce z Úlohy 7),

(d) $T = \nabla U$ pro $U(x,y,z) = xyz$.

Úloha 9 (Gauss na zkoušku)**.** Pomocí věty o divergenci a Úlohy 8 spočtěte tok (vždy s vnější normálou)

(a) pole $T(x) = x$ povrchem krychle $[0,1]^3$ a sférou $\partial B_R(0)$ (porovnejte s Úlohou 7(a)),

(b) pole $T(x,y,z) = (-y,\ x,\ 0)$ hranicí libovolné Ω, pro kterou platí věta o divergenci,

(c) pole $T(x,y,z) = (x+y^2,\ y+z^2,\ z+x^2)$ jednotkovou sférou.

Úloha 10. Použijte větu o divergenci.

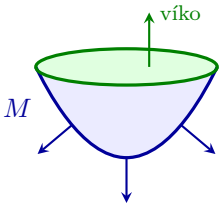
(a) Spočtěte tok pole $T(x,y,z) = (x^2,\ y^2,\ z^2)$ povrchem krychle $[0,a]^3$ s vnější normálou, jednou Gaussem a jednou přímo přes stěny.

(b) *(Miska.)* Spočtěte tok pole $T(x,y,z) = \big(x+\sin(yz),\ y+e^{xz},\ z\big)$ plochou $M = \{z = x^2+y^2,\ z<1\}$ orientovanou normálou se zápornou z-ovou složkou. *Nápověda:* přiklopte víko.

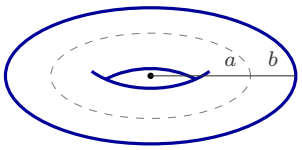
(c) *(Kobliha.)* Spočtěte objem anuloidu, jehož povrch je parametrizován

$$\varphi(u,v) = \big((a+b\cos v)\cos u,\ (a+b\cos v)\sin u,\ b\sin v\big), \qquad (u,v)\in(-\pi,\pi)^2, \quad a>b>0.$$

Spočtěte $\varphi_u \times \varphi_v$ a rozhodněte, zda míří ven.



(b)



(c)

5 Stokesova věta

Definice (Okraj a souhlasná orientace).
Nechť $\varphi\colon E \to \mathbb{R}^3$ parametrizuje jednoduchou 2-plochu, $E \subset \mathbb{R}^2$ je oblast a $(\psi, [a,b])$ je regulární Jordanova po částech C^1-křivka s $\langle\psi\rangle \subset E$. Položme $M := \varphi(\operatorname{Int}\psi)$ a $\eta := \varphi\circ\psi$ (*okraj* plochy M). Obíhá-li ψ v kladném smyslu, je okraj η *souhlasně orientovaný* s normálou $\nu := \frac{w_\varphi}{\|w_\varphi\|}$.

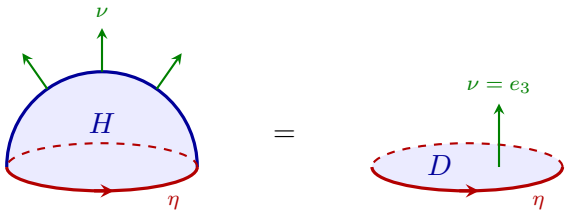
Prakticky (*pravidlo pravé ruky*): jdeme-li po okraji ve směru η s hlavou ve směru ν, máme plochu M po levé ruce.

Tvrzeníčko (Stokesova věta). Nechť M, ν a okraj η jsou jako výše (souhlasně orientované) a T je třídy C^1 na otevřené množině obsahující $M \cup \langle\eta\rangle$. Potom

$$\boxed{\int_M \operatorname{rot} T \cdot \nu \, \mathrm{d}S = \int_\eta T \cdot \mathrm{d}\eta.}$$

Pro rovinnou $M \subset \{z = 0\}$ s $\nu = e_3$ je $\operatorname{rot} T \cdot \nu = \frac{\partial T_2}{\partial x} - \frac{\partial T_1}{\partial y}$ a dostaneme Greenovu větu.

Co Stokes říká. $\operatorname{rot} T(x) \cdot \nu$ měří, jak moc pole víří kolem osy ν: malý kroužek kolem x v rovině kolmé na ν má cirkulaci $\approx \operatorname{rot} T(x) \cdot \nu \cdot$ (obsah kroužku). Jako u Greena: *víření na ploše = cirkulace po okraji*. Důsledek: tok $\operatorname{rot} T$ závisí *jen na okraji*, takže plochu smíme vyměnit za jinou se stejně orientovaným okrajem.



Polosféra H a kruh D mají stejný okraj η, proto $\int_H \operatorname{rot} T \cdot \nu \, \mathrm{d}S = \int_D \operatorname{rot} T \cdot \nu \, \mathrm{d}S$.

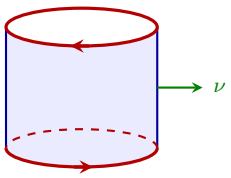
Úloha 11 (Pravidlo pravé ruky)**.** Určete, jak musí obíhat okraj plochy, aby byl souhlasně orientovaný s normálou.

(a) kruh $\{x^2 + y^2 < 1,\ z = 0\}$ s normálou e_3, resp. $-e_3$ (při pohledu shora proti, nebo po směru hodinových ručiček?),

(b) horní polosféra $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z > 0\}$ s vnější normálou,

(c) trojúhelník s vrcholy $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ s normálou mířící od počátku: v jakém pořadí obíhat vrcholy?

(d) plášť válce $\{x^2 + y^2 = 1,\ 0 < z < 1\}$ s vnější normálou. Kolik má okrajů?



(d)

Úloha 12 (Stokes na zkoušku)**.** Ověřte Stokesovu větu, tj. spočtěte obě strany, pro kruh $M = \{x^2 + y^2 < R^2,\ z = 0\}$ s normálou e_3 a pole

(a) $T(x, y, z) = (-y,\ x,\ 0)$,

(b) $T(x, y, z) = (y,\ z,\ x)$ (stačí $R = 1$).

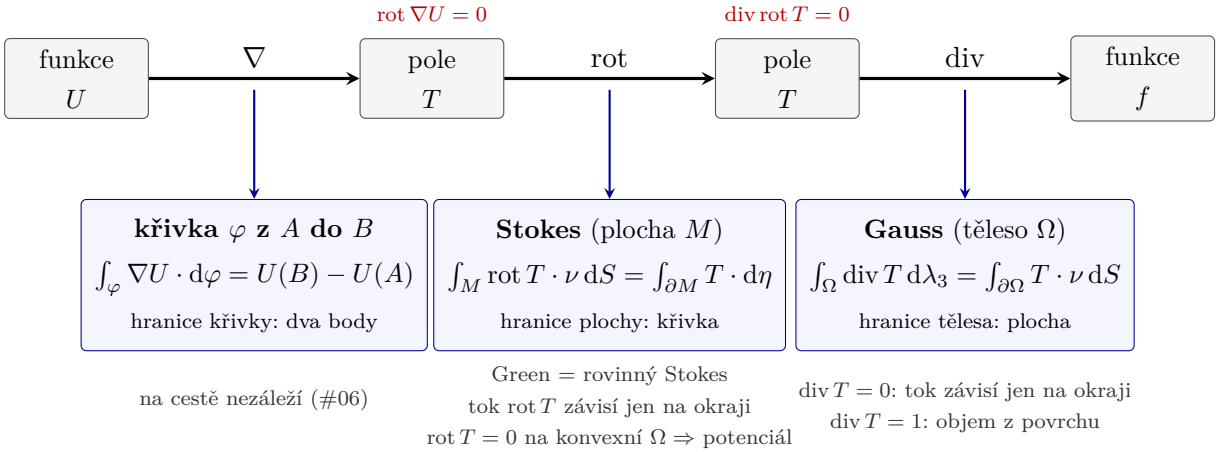
Úloha 13. Použijte Stokesovu větu.

(a) Spočtěte $\int_\eta z\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}z$, kde η je průnik válce $x^2 + y^2 = 4$ s rovinou $\frac{x}{2} + \frac{z}{3} = 1$, obíhaný v pořadí bodů $(2,0,0)$, $(0,2,3)$, $(-2,0,6)$. Pak ještě jednou přímo.

(b) Spočtěte $\int_H \operatorname{rot} T \cdot \nu\,\mathrm{d}S$, kde $H = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z > 0\}$ je orientovaná ven a

$$T(x,y,z) = \big(-y + z\,e^{xy},\quad x + z\cos(x+y),\quad e^{xyz}\big).$$

Myšlenková mapa.



Prakticky: jak spočítat tok $\int_M T \cdot \nu\,\mathrm{d}S$.

(1) Je M uzavřená (hranice tělesa Ω) a T hladké uvnitř? ⇒ Gauss: $\int_\Omega \operatorname{div} T$. Pozor na znaménko u vnitřní normály.

(2) Není M uzavřená, ale $\operatorname{div} T$ je jednoduchá? ⇒ přiklopíme *víko*, použijeme Gausse a tok víkem odečteme.

(3) Integrujeme $\operatorname{rot} T$? ⇒ Stokes: stačí okraj, nebo plochu vyměníme za jednodušší se stejným okrajem.

(4) Jinak z definice: parametrizace z kuchařky, $w_\varphi = \varphi_u \times \varphi_v$, **kontrola orientace** v jednom bodě a $\pm\int_E T(\varphi)\cdot w_\varphi$.

6 Na předpokladech záleží

Úloha 14 (Bodový náboj)**.** Na $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ uvažujme pole

$$T(x) = \frac{x}{\|x\|^3}$$

(až na konstantu elektrické pole bodového náboje v počátku).

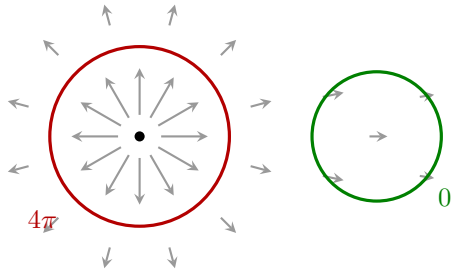
(a) Ověřte, že $\operatorname{div} T = 0$ na celé Ω.

(b) Spočtěte tok T sférou $\partial B_R(0)$ s vnější normálou. Je to ve sporu s Gaussovou větou?

(c) Kolik je tok T sférou se středem $(3,0,0)$ a poloměrem 1?

(d) Ukažte, že tok T povrchem krychle $[-1,1]^3$ (ven) je 4π. Kolik je tok jednou stěnou?

(e) Může být $T = \operatorname{rot} A$ pro nějaké $A \in C^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$? *Nápověda:* Stokes pro horní a dolní polosféru.



Úloha 15 (Najděte chybu v úvahách)**.** Každá z úvah obsahuje chybu. Najděte ji a opravte výsledek.

(a) Válcovou plochu $V = \{x^2 + y^2 = 1,\ 0 < z < 1\}$ parametrizujeme $\varphi(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$, $(u,v) \in (0,4\pi) \times (0,1)$. Je $\|\varphi_u \times \varphi_v\| = 1$, takže $S_2(V) = \lambda_2\big((0,4\pi)\times(0,1)\big) = 4\pi$.

(b) Pro $T = (-y, x, 0)$ a kružnici $\eta(t) = (\sin t, \cos t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$, dává Stokes s kruhem $D = \{x^2+y^2 < 1,\ z = 0\}$ a normálou e_3

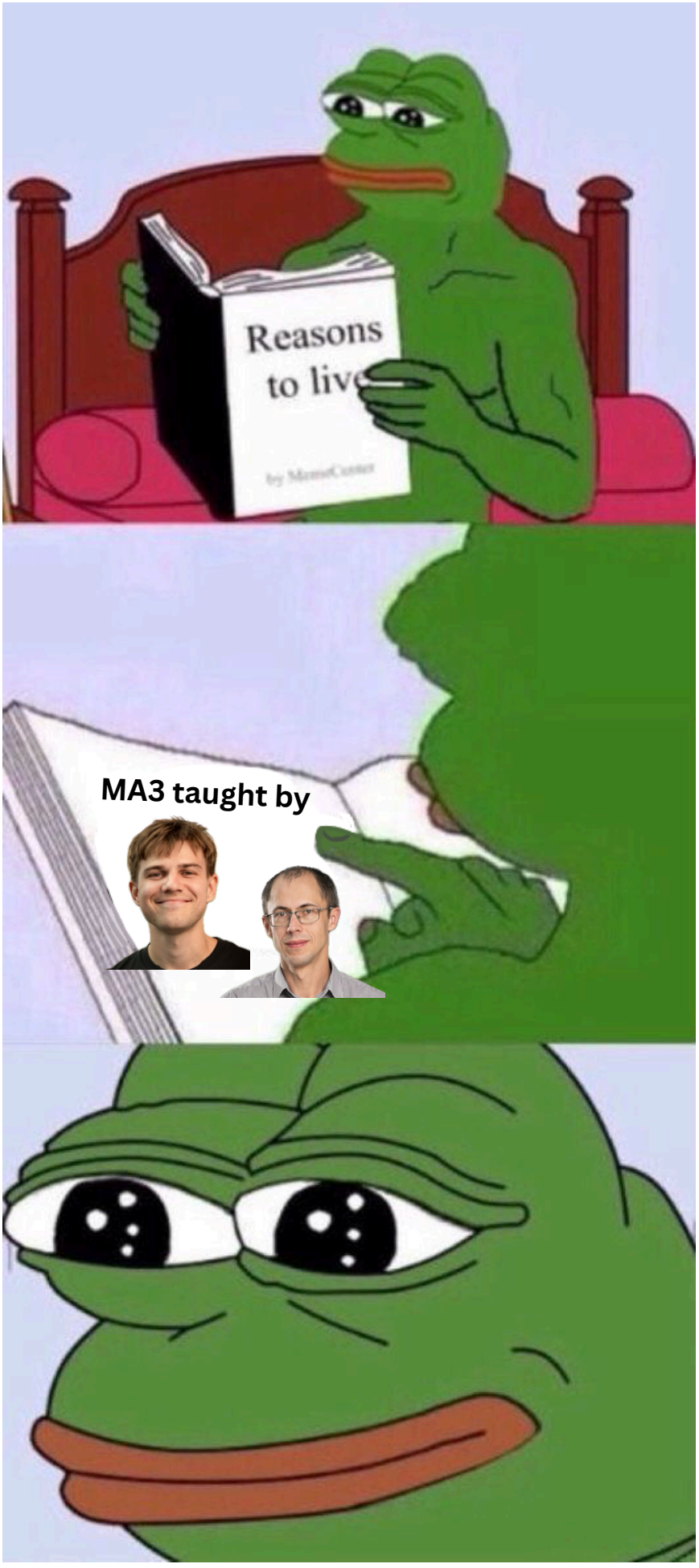
$$\int_\eta T \cdot \mathrm{d}\eta = \int_D \operatorname{rot} T \cdot e_3 \,\mathrm{d}S = \int_D 2 \,\mathrm{d}S = 2\pi.$$

(c) Na kopuli $H = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z > 0\}$ (normála ven) prší, $T = (0,0,-1)$. Podle Gaussovy věty je $\int_H T \cdot \nu \,\mathrm{d}S = \int_{\text{polokoule}} \operatorname{div} T \,\mathrm{d}\lambda_3 = 0$.

(d) Obsah válce V z (a) je limitou obsahů vepsaných mnohostěnů z trojúhelníků s vrcholy na V, jejichž průměr jde k nule (stejně jako u délky křivky a vepsaných lomených čar).

Shrnutí: co není zdarma.

předpoklad	k čemu je	co se stane bez něj
regularita φ (hodnost 2)	tečná rovina, normála, $\mathrm{d}S$	$(\cos(u+v), \sin(u+v), u+v)$ je jen šroubovice
prostota φ	integrál závisí jen na M	válec dvakrát: 4π místo 2π
obsah přes $\|\varphi_u \times \varphi_v\|$	rozumná definice obsahu	vepsané mnohostěny: cokoli $\geq 2\pi$ i ∞
orientovatelnost	tok má smysl	Möbiův list
souhlasná orientace okraje	znaménko ve Stokesově větě	kružnice po směru ručiček: 2π místo -2π
M uzavřená ($M = \partial\Omega$)	Gaussova věta	déšť na kopuli: 0 místo $-\pi$
T hladké na celém $\overline{\Omega}$	Gaussova věta	bodový náboj: 0 místo 4π
Ω bez dutin	$\operatorname{div} T = 0 \Rightarrow T = \operatorname{rot} A$	bodový náboj na $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$


Reasons
to live
MA3 taught by