#9 – Derivace funkce

aktualizace: 14. listopadu 2026

1 Pojmy

Definice (Derivace).
Nechť f je definovaná na nějakém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$. **Derivací** funkce f v bodě a nazveme

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

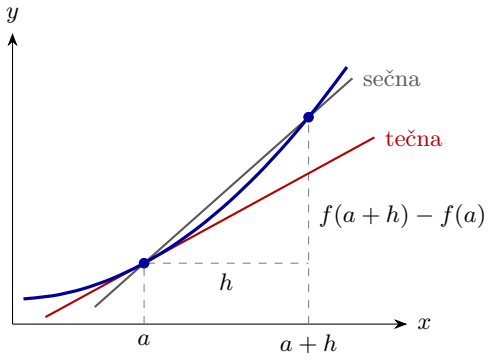
pokud tato limita existuje. Je-li $f'(a) \in \mathbb{R}$, mluvíme o **vlastní** derivaci, je-li $f'(a) = \pm\infty$, o **nevlastní**.

Nahradíme-li limitu limitou zprava, resp. zleva, dostaneme **derivaci zprava** $f'_+(a)$, resp. **zleva** $f'_-(a)$.

Graficky.

Zlomek $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ je směrnice **sečny** grafu body $[a, f(a)]$ a $[a+h, f(a+h)]$. Pro $h \to 0$ se druhý bod posouvá po grafu k prvnímu a sečna se natáčí do **tečny**. Derivace $f'(a)$ je tedy směrnice tečny a tečna má rovnici

$$y = f(a) + f'(a)(x-a).$$



Tvrzeníčko (Jednostranné derivace a spojitost). Derivace $f'(a)$ existuje, právě když existují $f'_+(a)$ i $f'_-(a)$ a jsou si rovny.

Má-li f v bodě a *vlastní* derivaci, je v bodě a spojitá. Obráceně to neplatí: $|x|$ je v nule spojitá, ale derivaci tam nemá.

Tvrzeníčko (Aritmetika derivací). Mají-li f a g v bodě a vlastní derivace a $c \in \mathbb{R}$, pak v bodě a platí

$$(f \pm g)' = f' \pm g', \qquad (cf)' = cf', \qquad (fg)' = f'g + fg', \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad \text{(je-li } g(a) \neq 0\text{)}.$$

Tvrzeníčko (Derivace složené funkce). Má-li g vlastní derivaci v bodě a a f vlastní derivaci v bodě $g(a)$, pak

$$(f \circ g)'(a) = f'\big(g(a)\big) \cdot g'(a).$$

Tvrzeníčko (Derivace inverzní funkce). Nechť f je spojitá a ryze monotónní na otevřeném intervalu I, $a \in I$ a $f'(a) \neq 0$ je vlastní. Pak pro $b = f(a)$ platí

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Graficky: graf f^{-1} je obraz grafu f v osové souměrnosti podle přímky $y = x$, takže směrnice tečny přejde v převrácenou hodnotu.

Tvrzeníčko (Tabulka derivací).

$$(c)' = 0 \qquad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \qquad (e^x)' = e^x \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x \qquad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Ostatní exponenciály převedeme na e: $(a^x)' = \left(e^{x \ln a}\right)' = a^x \ln a$. Každý vzorec platí ve vnitřních bodech definičního oboru, kde má pravá strana smysl, např. $\ln x$ pro $x > 0$, $\arcsin x$ jen pro $|x| < 1$ a $\sqrt{x} = x^{1/2}$ jen pro $x > 0$.

2 Derivace z definice

Dosaďte do zlomku z definice a upravte ho (roznásobení, společný jmenovatel, rozšíření, součtové vzorce) tak, aby šlo h vykrátit. Teprve potom limitujte. Standardní limity z #8 jsou ve skutečnosti derivace v nule: $\frac{\sin h}{h} = \frac{\sin(0+h)-\sin 0}{h} \to 1$ říká, že $(\sin x)'(0) = 1$, a podobně $\frac{e^h-1}{h} \to 1$ říká, že $(e^x)'(0) = 1$.

Úloha 1. Z definice spočtěte $f'(a)$:

(a) $f(x) = x^3$, $a \in \mathbb{R}$

(b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $a \neq 0$

(c) $f(x) = \sqrt{x}$, $a > 0$

(d) $f(x) = \sin x$, $a \in \mathbb{R}$

3 Počítání derivací

Součty, součiny a podíly

Úloha 2. Spočtěte derivace funkcí:

(a) $\dfrac{x^3 - 2x + \sqrt{x}}{x}$

(b) $x^2 \sin x$

(c) $e^x \left(x^2 - 2x + 2\right)$

(d) $\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

(e) $\dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$

(f) $x\, e^x \sin x$

Složená funkce

Úloha 3. Spočtěte derivace funkcí:

(a) $\left(x^2 - 3x + 1\right)^7$

(b) $\sqrt{1 - x^2}$

(c) $\sin^2(3x)$

(d) $x\, e^{-x^2}$

(e) $\ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

(f) $\arctan \dfrac{1 + x}{1 - x}$

Logaritmické derivování

Je-li proměnná v základu i v exponentu, nejde o mocninu ani o exponenciálu. Přepište ji pomocí $f^g = e^{g \ln f}$ a derivujte složenou funkci:

$$(f^g)' = \left(e^{g \ln f}\right)' = f^g \cdot \left(g' \ln f + g\, \frac{f'}{f}\right).$$

Úloha 4. Spočtěte derivace funkcí (pro $x > 0$):

(a) x^x

(b) $x^{\sin x}$

(c) $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$

Derivace inverzní funkce

Zde využijte vztahů $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ a $\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$.

Úloha 5. Pomocí věty o derivaci inverzní funkce:

(a) odvoďte $(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ pro $|y| < 1$,

(b) odvoďte $(\arctan y)' = \frac{1}{1+y^2}$,

4 Tečna ke grafu

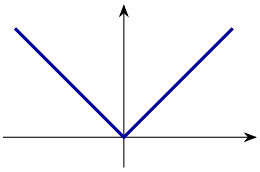
Úloha 6. Pomocí rovnice tečny $y = f(a) + f'(a)(x - a)$:

(a) napište tečnu ke grafu funkce $f(x) = \ln x$ v bodě $[e, 1]$,

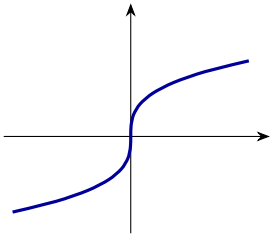
(b) najděte všechny tečny ke grafu funkce $f(x) = x^2$, které procházejí bodem $[1, -3]$.

5 Když derivace neexistuje

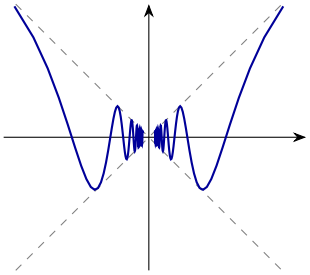
Hrot: $|x|$



Svislá tečna: $\sqrt[3]{x}$



Oscilace: $x \sin \frac{1}{x}$



Úloha 7. Rozhodněte, zda existuje $f'(a)$, a pokud ano, spočtěte ji:

(a) $f(x) = |x^2 - 1|$, $a = 1$

(b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $a = 0$

(c) $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, $f(0) = 0$, $a = 0$

(d) $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$, $f(0) = 0$, $a = 0$