#10 – Opakování na zápočet

aktualizace: 19. listopadu 2026

1 Pojmy

Definice a věty o posloupnostech, vlastnostech funkcí, limitách a derivacích najdete v #4–#9. Tady doplníme jen to, co nám derivace dají navíc: monotonii, konvexitu, extrémy, l'Hospitalovo pravidlo a asymptoty.

Tvrzeníčko (Monotonie a konvexita). Nechť f je spojitá na intervalu I a má derivaci v každém vnitřním bodě I.

(i) Je-li $f' > 0$ uvnitř I, je f na I rostoucí. Je-li $f' < 0$, je klesající.

(ii) Má-li f uvnitř I i druhou derivaci a je-li $f'' > 0$, je f na I ryze konvexní. Je-li $f'' < 0$, je ryze konkávní.

Obojí platí, i když se f', resp. f'', v konečně mnoha bodech rovná nule. Například x^3 je rostoucí na celém $\mathbb{R}$, přestože $(x^3)' = 0$ v nule.

Definice (Inflexní bod).
Bod $a \in D_f$ je **inflexní bod** funkce f, jestliže f má v bodě a vlastní derivaci a existuje $\delta > 0$ takové, že f je na $(a-\delta, a]$ ryze konvexní a na $[a, a+\delta)$ ryze konkávní, nebo naopak.

Tvrzeníčko (Lokální a globální extrémy).

(i) *(Fermat)* Má-li f v bodě a lokální extrém a existuje-li $f'(a)$, pak $f'(a) = 0$.

(ii) Je-li f spojitá v bodě a, $f' > 0$ na $(a-\delta, a)$ a $f' < 0$ na $(a, a+\delta)$, má f v bodě a ostré lokální maximum. Pro opačná znaménka ostré lokální minimum.

(iii) Je-li $f'(a) = 0$ a $f''(a) > 0$, má f v bodě a ostré lokální minimum. Pro $f''(a) < 0$ ostré lokální maximum.

Kandidáti na lokální extrém jsou tedy **stacionární body** ($f'(a) = 0$) a body, kde $f'(a)$ neexistuje. Ne každý kandidát je extrém: $(x^3)'(0) = 0$, ale x^3 je rostoucí.

Spojitá funkce na uzavřeném intervalu $[a, b]$ nabývá globálního maxima i minima. Najdeme je porovnáním hodnot ve všech kandidátech uvnitř (a, b) a v krajních bodech a, b.

Tvrzeníčko (l'Hospitalovo pravidlo). Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, funkce f, g mají vlastní derivace na nějakém prstencovém okolí bodu a a platí $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, nebo $\lim_{x\to a} |g(x)| = +\infty$. Existuje-li $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, pak

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Totéž platí pro jednostranné limity. Čitatel a jmenovatel derivujeme *zvlášť*, nikoli jako podíl podle vzorce z #9. Ostatní neurčité výrazy nejprve převedeme na podíl:

$$0 \cdot \infty: \ fg = \frac{f}{1/g}, \qquad \infty - \infty: \text{ společný jmenovatel}, \qquad 1^\infty,\ 0^0,\ \infty^0: \ f^g = e^{g \ln f}.$$

Definice (Asymptoty).
Přímka $x = a$ je **svislá asymptota** (asymptota bez směrnice) grafu funkce f, je-li aspoň jedna z limit $\lim_{x\to a^+} f(x)$, $\lim_{x\to a^-} f(x)$ nevlastní.

Přímka $y = kx+q$ je **asymptota v $+\infty$** (asymptota se směrnicí), jestliže $\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-(kx+q)\big) = 0$. Analogicky v $-\infty$. Pro $k = 0$ mluvíme o vodorovné asymptotě.

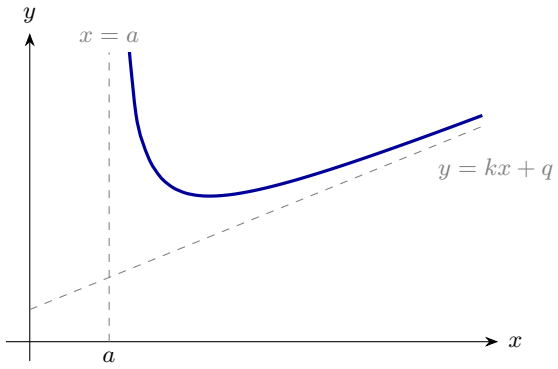
Tvrzeníčko (Výpočet asymptoty se směrnicí). Přímka $y = kx+q$ je asymptotou grafu f v $+\infty$, právě když

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R} \qquad \text{a} \qquad q = \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - kx\big) \in \mathbb{R}.$$

Analogicky v $-\infty$. Asymptoty v $+\infty$ a v $-\infty$ se mohou lišit, proto je počítáme zvlášť.

Graficky.
U svislé asymptoty graf utíká podél přímky $x = a$ do $\pm\infty$. Kandidáty jsou krajní body D_f, které v D_f neleží (typicky nulové body jmenovatele). Ne každý z nich ale asymptotu dává.

U asymptoty se směrnicí se svislá vzdálenost grafu od přímky $y = kx + q$ zmenšuje k nule. Pro velká x je tedy $f(x) \approx kx + q$, odkud $\frac{f(x)}{x} \to k$ a $f(x) - kx \to q$.



2 Limity posloupností

Úloha 1. Spočtěte limity:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n + 3^{n+1}}{3^n - n^2}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1} - n\right)$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+3}{2n-1}\right)^n$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n$

3 Vlastnosti funkcí

Úloha 2. Doplňte tabulku. Ve sloupci *perioda* uveďte nejmenší periodu, pokud existuje.

$f(x)$	Definiční obor	sudá/lichá	perioda	omezená	prostá	průsečíky s osami
$\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$						
$\ln\left(x^2-1\right)$						
$\ln(\sin x)$						
$\lvert\sin x\rvert+\lvert\cos x\rvert$						

4 Monotonie, konvexita a extrémy

Spočtěte f' a f'', upravte je na součin nebo podíl a sestavte tabulku znamének. Nezapomeňte na body, ve kterých derivace neexistuje.

Úloha 3. Určete intervaly monotonie, intervaly, na nichž je funkce konvexní a konkávní, lokální extrémy a inflexní body funkcí

(a) $f(x)=x^4-4x^3$, (b) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}\,(x-5)$.

Úloha 4. Najděte globální extrémy funkce $f(x)=x^2e^{-x}$ na intervalu $[-1,3]$. Má f globální extrémy i na celém $\mathbb{R}$?

5 Limity funkcí a l'Hospitalovo pravidlo

L'Hospitalovo pravidlo je silné, ale ne vždy nejrychlejší. Než začnete derivovat, ověřte, že jde opravdu o typ $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\cdot}{\pm\infty}$.

Úloha 5. Spočtěte limity:

(a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$ (c) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$ (d) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{1/x^2}$

(b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$ (e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$

U (e) rozhodněte, zda lze použít l'Hospitalovo pravidlo.

6 Asymptoty

Úloha 6. Najděte všechny asymptoty grafů funkcí

(a) $f(x) = x\,e^{1/x}$, (b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$, (c) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

U (c) rozhodněte, zda graf svou asymptotu protíná.

7 Průběh funkce

Postup vyšetření průběhu funkce.

1. Definiční obor, spojitost, sudost a lichost, periodicita. Je-li f sudá nebo lichá, stačí vyšetřit $x \geq 0$.
2. Průsečíky s osami a znaménko f.
3. Limity v krajních bodech D_f, svislé asymptoty a asymptoty v $\pm\infty$.
4. První derivace: intervaly monotonie a lokální extrémy.
5. Druhá derivace: intervaly konvexity a konkávity, inflexní body.
6. Obor hodnot a graf. Nejprve zakreslete asymptoty a význačné body, potom křivku.

Úloha 7. Vyšetřete průběh funkcí a načrtněte jejich grafy:

(a) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$, (b) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

Bonus: pomocí (b) rozhodněte bez kalkulačky, které z čísel e^π a π^e je větší.